«Задачи на построение.

Деление угла циркулем и линейкой»

Класс: 7А класс

Тип урока: Урок комплексного применения ЗУН учащихся – практикум.

Цели урока:

I. **Образовательная**

1. Обобщить знания учащихся по теме «Задачи на построение циркулем и линейкой»;
2. Рассмотреть возможность деления угла на $n \in N$ равных углов;
3. Отработать навык построения биссектрисы угла, равностороннего треугольника.

II. **Развивающая**

1. Развивать мышление учащихся при решении задач, выходящих за рамки школьного курса;
2. Развивать умение анализировать, сравнивать, делать выводы;
3. Развивать умение самостоятельно применять знания в измененных нестандартных условиях;
4. Развивать память учащихся.

III. **Воспитательная**

1. Воспитание интереса к предмету,
2. Воспитание доброжелательности, умения работать в коллективе и в парах у учащихся.
3. Воспитание личностных качеств: активности, самостоятельности, аккуратности в работе.

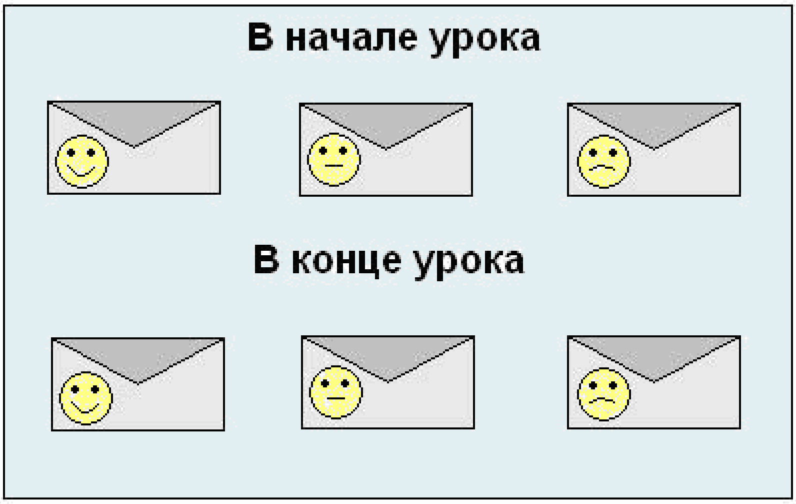
Оборудование:

1) интерактивная доска;

2) рабочая карточка для каждого ученика (Приложение 1);

3) презентация для интерактивной доски;

4) ватман с названиями «В начале урока», «В конце урока» с конвертами и карточки (по 2 на каждого ученика) – 56 штук.



Требования к знаниям и умениям:

Учащиеся должны знать:

– стандартные построения циркулем и линейкой,

Учащиеся должны уметь:

– строить биссектрису угла, равносторонний треугольник;

– применять стандартные построения при решении задач на деление угла циркулем и линейкой.

<u>План урока</u>:

I. Организационный момент.

II. Постановка проблемы урока.

III. Актуализация опорных знаний.

IV. Закрепление изученного материала – самостоятельная работа в парах.

V. Физкультминутка.

VI. Самостоятельная работа в парах.

VII. Рефлексия.

VIII. Постановка и комментарий для выполнения домашнего задания.

Ход урока

I. Организационный момент.

В начале урока, до звонка, учитель предлагает отметить свое настроение: положить одну карточку в соответствующий конверт под строкой «В начале урока».

II. Постановка проблемы урока.

Учитель предлагает решить задачу.

Задача: Разделить угол 66^0 на 11 равных частей (при условии, что этот угол построен и его величина известна).

Ученики испытывают затруднения и предполагают, что им при решении задачи понадобятся построения циркулем и линейкой.

III. Актуализация опорных знаний

Для того чтобы решить задачу, учитель предлагает учащимся ответить на вопросы и выполнить задания:

1. Какие простейшие построения являются стандартными построениями циркулем и линейкой?

Ученики на интерактивной доске из представленных названий задач на построения выбирают стандартные построения. Один из учеников работает на доске, передвигая фразы, сортирует названия на стандартные и задачи на построение.

Ответ:

– построить отрезок, равный данному отрезку;
– построить середину отрезка;
– построить перпендикуляр к прямой;
– построить серединный перпендикуляр;
– построить угол, равный данному углу;
– построить биссектрису угла.

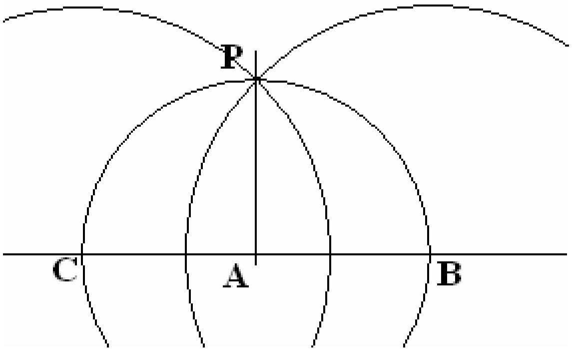
2. На экране появляются слайды, на которых последовательность шагов. Ученикам необходимо определить какую задачу на построение описывает данная последовательность шагов. Ответы на каждое задание спрятаны за шторкой. Ученик, ответив на вопрос, открывает шторку и проверяет свой ответ.

Задание 1:

1. AB – прямая.
2. Проведем окр.(A;AB) $\Rightarrow$ C – точка пересечения окружности и прямой AB.
3. Проведем окр.(C;R) и окр.(B;R) $\Rightarrow$ P – точка пересечения окружностей.

4. Проведем CP.

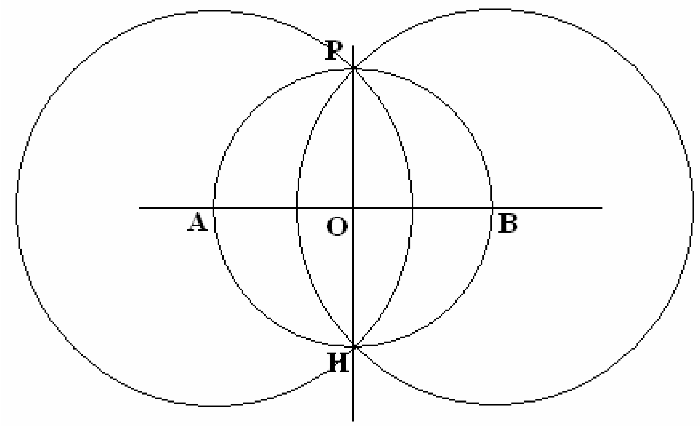
Ответ: построение прямого угла



Задание 2:

1. AB – отрезок.
2. Проведем окр.(A;R) и окр.(B;R) $\Rightarrow$ P, H – точки пересечения окружностей.
3. Проведем PH$\cap$AB=O

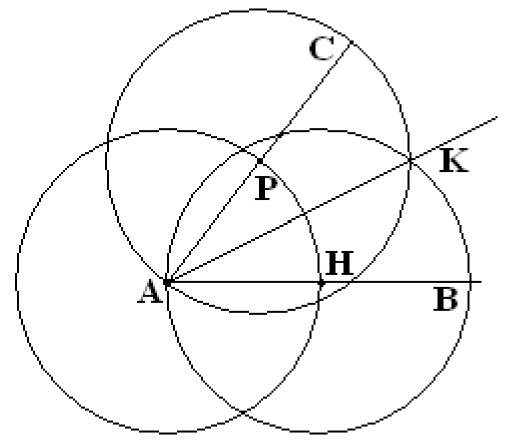
Ответ: построение серединного перпендикуляра PH к AB



Задание 3:

1. $\angle$CAB
2. Проведем окр.(A;R) $\Rightarrow$ P, H – точки пересечения окружности и сторон угла.
3. Проведем окр.(P;PH) и окр.(H;PH) $\Rightarrow$ K – точка пересечения окружностей.
4. Проведем AK.

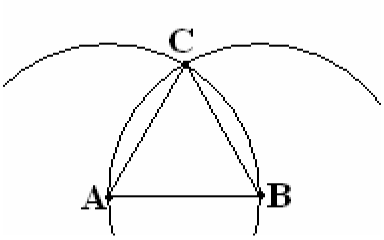
Ответ: построение биссектрисы угла



Задание 4:

1. AB – отрезок.
2. Проведем окр.(A;AB) и окр.(B;AB) $\Rightarrow$ C – точка пересечения окружностей.
3. Проведем AC и BC

Ответ: построение равностороннего треугольника



3. Из каких основных этапов состоит осмысленное решение задач на построение?

Ответ: осмысленное решение задач на построение состоит из 4 основных этапов: анализ, построение, доказательство (синтез), исследование.

4. В чем смысл каждого этапа решения задач на построение?

На экране: формулировки каждого этапа решения задач на построение, название этапов. Ученик у доски перемещает название каждого этапа к соответствующей формулировке, чтобы получилось верное предложение.

Ответ:

Анализ. Составляется план решения. Нужно найти такую зависимость между данными и искомыми величинами, которая позволила бы определить положение искомой точки (отрезка или угла), на нахождение которых нацелено решение задачи.

Построение – механическое выполнение тех приемов, которые были выведены из плана решения задачи, т.е. анализа. Любая задача на построение разбивается на конечное число шагов (простейших задач на построение).
Доказательство. Когда искомая фигура построена, необходимо доказать, что она удовлетворяет всем требованиям задачи. При этом ход рассуждений будет обратный тому, который применялся при анализе.
Исследование имеет целью выяснить, всегда ли задача разрешима, сколько решений допускается (одно или несколько). Необходимо рассмотреть всевозможные частные случаи, причем нужно выяснить, меняется ли ход решения в них и как именно.

5. Какие построения мы добавили с вами к стандартным построениям циркулем и линейкой на предыдущих уроках?
Ответ:
– построить треугольник (по трём сторонам, по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам);
– построить прямоугольный треугольник (по гипотенузе и катету, по гипотенузе и острому углу);
– построить прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой;
– построение отрезков суммы и разности отрезков;
– построение отрезка в n раз больше данного;
– построение суммы и разности двух углов.

IV. Изучение нового материала

Учитель: Вы дома подумали над вопросом «Какую задачу на построение мы не рассмотрели?». Ваши предложения и предположения.

Ученики предлагают свои варианты задач, вспоминают задачу в начале урока и говорят о необходимости деления угла на равные части.

Учитель: Сегодня нам необходимо определить всегда ли выполнимо «**Деление данного угла на** $n \in N$ **равных углов».**

Учитель: Как вы считаете, какое стандартное построение позволит нам выполнить деление угла на 2, 4, 8, 16, … равных угла?

Ответ: Построение биссектрисы угла позволяет разделить любой угол на 2, 4, 8, … 2^n равных углов. В каждом случае задача сводится к построению биссектрис полученных углов, что выполнимо всегда циркулем и линейкой.

Учитель: Объясните, как разделить угол АВС на 4 равных угла.

Ответ: Строим биссектрису ВК $\angle$АВС, получаем $\angle$АВК= $\angle$СВК=$\angle$АВС:2. Строим биссектрисы ВР и ВМ углов $\angle$АВК и $\angle$CDR соответственно. Получаем: $\angle$АВР=$\angle$РВК= $\angle$МВК= $\angle$СВМ= $\angle$АВК:2= $\angle$АВС:4.

Учитель: Можем ли мы решить нашу задачу: разделить угол 66^0 на 11 равных частей, биссектрисами?

Ученики говорят, что биссектриса не дает деления на 11 равных углов.

Учитель: Может нам поможет трисекция угла?

Ученики спрашивают: «Что такое трисекция угла?»

На вопрос класса отвечает один из учеников: сообщение на тему «Трисекция угла».

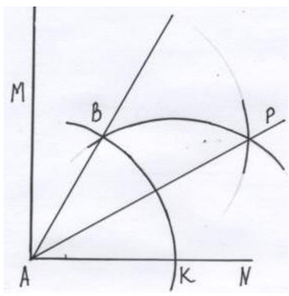
Историческая справка: Искусство построения геометрических фигур при помощи циркуля и линейки было в высокой степени развито в Древней Греции. Знаменитой была в древности задача о трисекции угла (о разделении угла на три равные части с помощью циркуля и линейки). Любой угол невозможно разделить на три равных части с помощью только циркуля и линейки. Попытки решения задачи с помощью инструментов и средств были предприняты еще в V в. до н.э. Французский математик П. Ванцель в 1837г. первым строго доказал, что невозможно осуществить трисекцию циркулем и линейкой.

Задача о трисекции угла становится разрешимой и общем случае, если не ограничиваться в геометрических построениях одними только классическими инструментами, циркулем и линейкой. Так, например, Гиппий Элидский, знаменитый софист, живший около 420 г. до н.э., пользовался для трисекции угла квадратрисой. Александрийский математик Никомед (II в. до н.э.) решил задачу о трисекции угла с помощью одной кривой, названной конхоидой Никомеда, и дал описание прибора для черчения этой кривой. Интересное решение задачи о трисекции угла дал Архимед в своей книге «Леммы».

Задача о трисекции угла оказывается разрешимой и при некоторых других частных значениях угла: 90^0, 45^0, 135^0. Деление прямого угла на три равные части умели производить ещё пифагорейцы, основываясь на том, что в равностороннем треугольнике каждый угол равен 60^o.

На интерактивной доске приведено решение задачи «Трисекция прямого угла».

Задача 1: Трисекция прямого угла.



Пусть требуется разделить на три равные части прямой $\angle$MAN.

1) Откладываем на луче AN произвольный отрезок AK, на котором строим равносторонний ΔAKB.

2) Так как $\angle$KAB равен 60^0, то $\angle$MAB= 30^0.

3) Строим биссектрису $\angle$KAB, получаем искомое деление прямого $\angle$MAN на три равных угла.

Учитель дает задание ученикам:

1. Рассмотрите решение данной задачи.
2. Определите основные построения.
3. Докажите, что данные шаги приведут к необходимому результату.

Ответы:

2. Построение равностороннего треугольника, построение биссектрисы угла.

3. Доказательство: $\angle$MAN=90^0. ΔAKB – равносторонний $\Rightarrow$ $\angle$KAB = 60^0. Значит, $\angle$MAB=$\angle$MAN – $\angle$KAB = 30^0. AP – биссектриса $\angle$KAB $\Rightarrow$

$\angle$KAP=$\angle$PAB=30^0. Получаем, что $\angle$KAP=$\angle$PAB=$\angle$MAB =30^0, т.е. искомое деление прямого $\angle$MAN на три равных угла.

Задание классу: В рабочей тетради выполните построение трисекции прямого угла, описав все этапы «Построения». Обязательно записать «Доказательство».

Учитель: Какие углы всегда можно построить с помощью циркуля и линейки?

Ответ: углы:

60^0 – угол в равностороннем треугольнике,

30^0 – биссектриса угла в равностороннем треугольнике,

45^0 – биссектриса прямого угла,

15^0 – биссектриса угла 30^0,

90^0 – перпендикуляр к прямой,

180^0 – развернутый угол.

Учитель в третий раз возвращает учеников к задаче:

Задача: Разделить угол 66^0 на 11 равных частей (при условии, что этот угол построен и его величина известна).

Ученики предлагают решение задачи. Если ученикам сложно, то учитель подводит ребят к её решению.

Решение: Т.к. 66^0: 11=6^0, то для решения этой задачи опять воспользуемся углом 60^0 – равносторонним треугольником. При построении равностороннего треугольника получаем 66^0–60^0 = 6^0, строим дважды по углу 6^0 (60^0–6^0–6^0 = 48^0), затем делим угол 48^0 на $8 = 2^3$ равных углов (т.е. проводим биссектрисы). При этом получаем 11 углов по 6^0.

Решение задачи записывается в рабочую тетрадь. Ученики отмечают, что в решении данной задачи они построение не выполняют, а описывают алгоритм решения.

V. Физкультминутка.

Одолела вас дремота, (*Зеваем*)

Шевельнуться неохота?

Ну-ка, делайте со мною

Упражнение такое:

Вверх, вниз потянись, (*Руки вверх, потянулись*)

Окончательно проснись.

Руки вытянуть пошире. (*Руки в стороны*)

Раз, два, три, четыре.

Наклониться — пять, шесть

(Наклоны туловища)

И на месте поскакать. (*Прыжки на месте*)

На носок, потом на пятку.

Все мы делаем зарядку.

V. Закрепление изученного материала – самостоятельная работа в парах

Каждый ученик получает карточку с задачами (Приложение 1). В карточке 3 задачи разного уровня. Первая задача (обязательного уровня) была рассмотрена на уроке и ученикам необходимо правильно выполнить построение, записать решение. Вторая задача (среднего уровня) требует от учеников умения строить равносторонний треугольник и биссектрису угла. А третья задача – повышенного уровня сложности.

У учеников, сидящих за одной партой, одинаковый вариант заданий. Работу ученики выполняют в паре, но каждый оформляет решение на своей карточке.

Критерий оценки за самостоятельную работу на карточке (на экране интерактивной доски):

«5» - за 3 правильно выполненные и оформленные задачи.

«4» - за 2 правильно выполненные и оформленные задачи или за 3 задачи с недочетами в оформлении.

«3» - за 1 правильно выполненную и оформленную задачу или за 2 задачи с недочетами в оформлении.

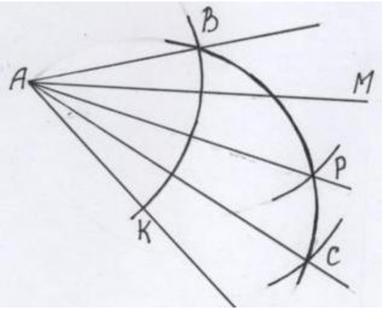
Решение задач самостоятельной работы:

Задача 1: Разделить угол на 4 равных угла.

Решение: Разделить угол ABC на 4 равных угла. Строим биссектрису BK $\angle$ABC, получаем $\angle$ABK= $\angle$CBK=$\angle$ABC:2. Строим биссектрисы BP и BM углов $\angle$ABK и $\angle$CDR соответственно. Получаем: $\angle$ABP=$\angle$PBK= $\angle$MBK= $\angle$CBM= $\angle$ABK:2= $\angle$ABC:4.

Задача 2: Трисекция угла в 45^0.

Решение данной задачи сводится к построению равностороннего треугольника. Пусть требуется разделить на три равные части $\angle$MAN=45^o. Откладываем на луче AN произвольный отрезок AK, на котором строим равносторонний ΔAKB в одной полуплоскости с точкой M относительно прямой AK. Строим биссектрису AP угла KAB, затем биссектрису AC угла PAK и получаем искомое деление угла MAN на три равных угла $\angle$MAP=$\angle$PAC=$\angle$CAK=15^o.



Доказательство: Т.к. ΔAKB – равносторонний, то $\angle$KAB=60^o. AP – биссектриса $\angle$KAB $\Rightarrow$ $\angle$BAP= $\angle$PAK=30^o и $\angle$MAP= $\angle$MAK– $\angle$PAK =45^o – 30^o=15^o. AC – биссектриса $\angle$PAK $\Rightarrow$ $\angle$PAC= $\angle$CAK=15^o. Значит, $\angle$MAP= $\angle$PAC= $\angle$CAK=15^o.

Задача 3 (1 вариант): Разделить угол 50^0 на 10 равных углов.

Решение: Т.к. 50^0: 5=10^0, то для решения этой задачи воспользуемся углом 60^0 – равносторонним треугольником. Получаем 1) 60^0–50^0 = 10^0, 2) 50^0–10^0= 40^0, 3) 40^0: 4=10^0.

Задача 3 (2 вариант): Разделить угол 72^0 на 6 равных углов.

Решение: Т.к. 72^0: 6=12^0, то для решения этой задачи воспользуемся углом 60^0 – равносторонним треугольником. Получаем 1) 72^0–60^0 = 12^0, 2) 60^0–12^0= 48^0, 3) 48^0: 4=12^0.

После выполнения самостоятельной работы, ученики сдают карточки учителю на проверку. При этом учитель просит поднять руки тех ребят, кто выполнил все задания, а потом тех, кто выполнил две задачи. Учитель отмечает хорошую работу учеников и ставит оценки за работу на уроке самым активным учащимся.

VI. Рефлексия.

Ответить на вопросы:

1. Всегда ли выполнима трисекция угла?

Ответ: Только в некоторых частных случаях: 45^0, 90^0.

2. Что нового узнали на уроке?

Ответ: Всегда можно построить циркулем и линейкой:

1) угла в *n* раз больше данного угла.

2) разделить любой угол на 2, 4, 8, … 2^n равных углов.

3) углы: 60^0, 30^0, 45^0, 15^0, 90^0, 180^0.

4) можно разделить некоторые заданные углы на данное количество равных углов или построить угол необходимой величины.

3. Можно ли разделить произвольный угол на 5, 7, 11, … равных углов?

Ответ: Нет. Только в некоторых частных случаях.

Учитель предлагает отметить свое настроение в конце урока. Для этого ребятам предлагается после звонка положить вторую карточку в соответствующий конверт под строкой «В конце урока».

VII. Постановка и комментарий для выполнения домашнего задания.

Решить задачи:

1. Трисекция угла в 135^0.

2. Построить угол 53^0, если построен угол 104^0.

Ученики проговаривают алгоритм решения задач в домашней работе:

Задача 1: Трисекция угла в 135^0.

1) Т.к. $135^o:3 = 45^o$, то из точки A строим перпендикуляр AK к прямой AM.
2) Затем строим биссектрису AP $\angle$KAM. При этом получаем искомое деление угла MAN на три равных угла $\angle KAN = \angle KAP = \angle PAM = 45^o$.

Учитель напоминает, что в первой задаче записать доказательство обязательно.

Задача 2: Построить угол 53^0, если построен угол 104^0.

При решении используем построения прямого угла, биссектрисы угла и угла 60^0. Построение: 1) $104^0–90^0=14^0$, 2) $14^0: 2 = 7^0$, 3) строим 60^0 и $60^0–7^0=53^0$.

Приложение 1

Тема урока «Деление угла циркулем и линейкой»

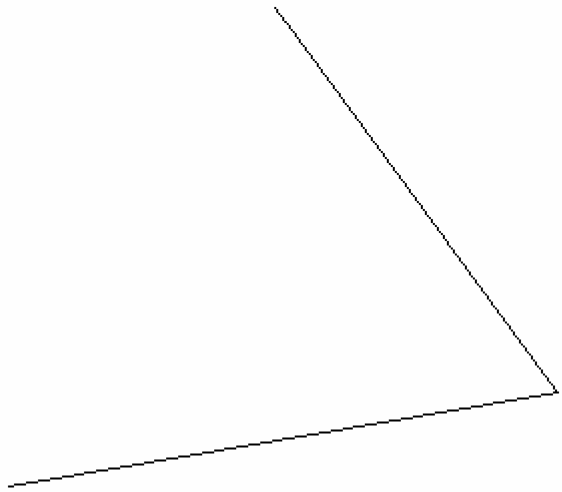
Вариант 1

Ф.И.____ Класс______

Задача 1: Разделить угол на 4 равных угла.

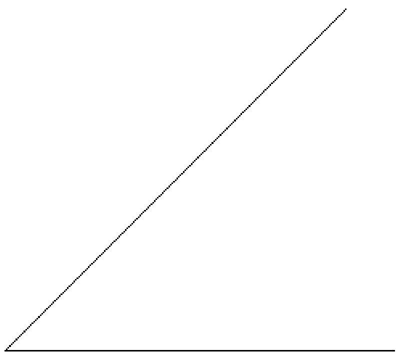
Построение:

1.



Задача 2: Трисекция угла 45^0.

Дано: $\angle$MAN=45^0.



Построение:

1.

Доказательство:

Задача 3: Разделить угол 50^0 на 10 равных углов.

Решение:

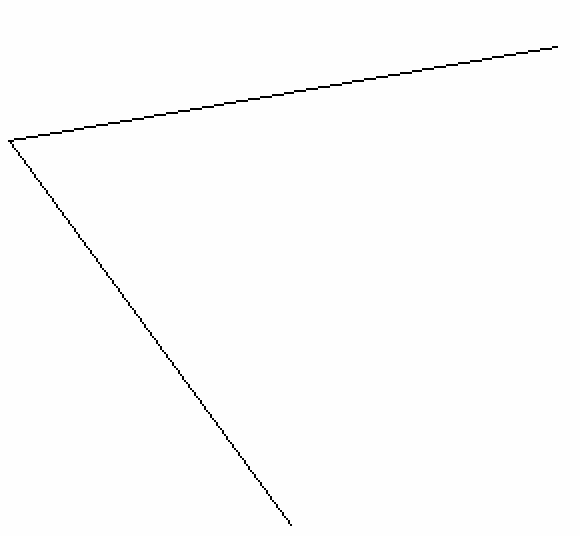
1.

Оценка «_______»

Тема урока «Деление угла циркулем и линейкой»
Вариант 2

Ф.И.____ Класс______

Задача 1: Разделить угол на 4 равных угла.



Построение:

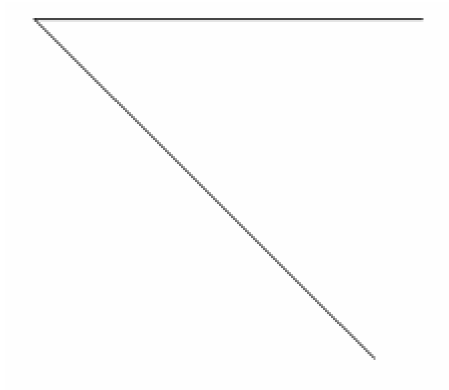
1.

Задача 2: Трисекция угла 45^0.

Дано: $\angle$MAN=45^0.

Построение:

1.



Доказательство:

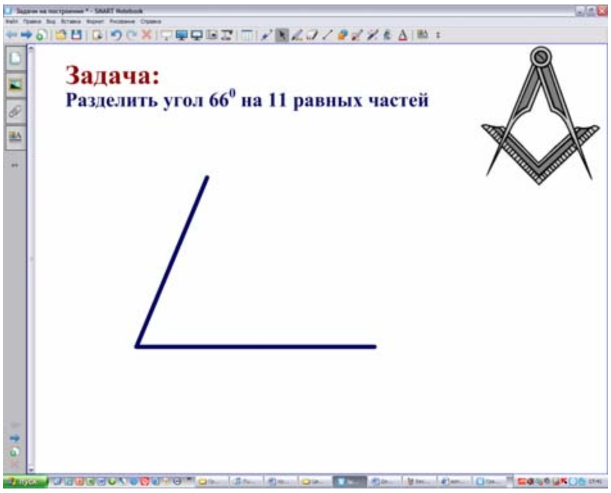
Задача 3: Разделить угол 72^0 на 6 равных углов.

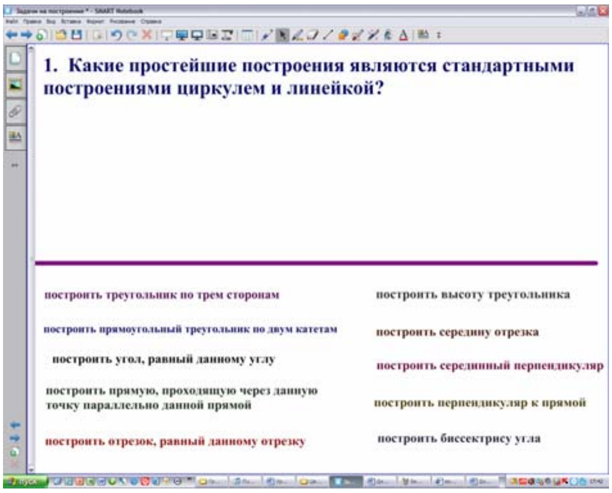
Решение:

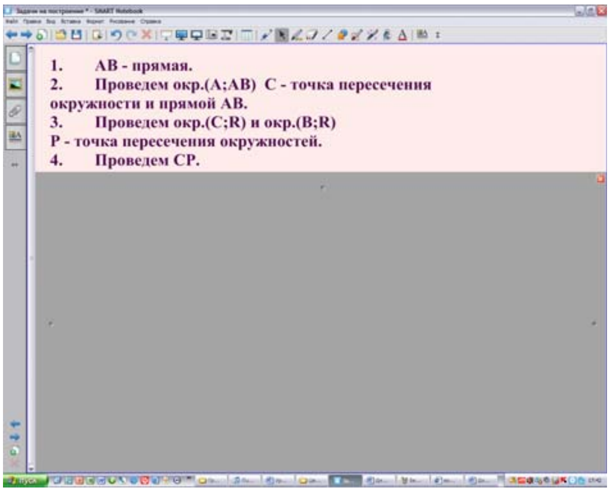
1.

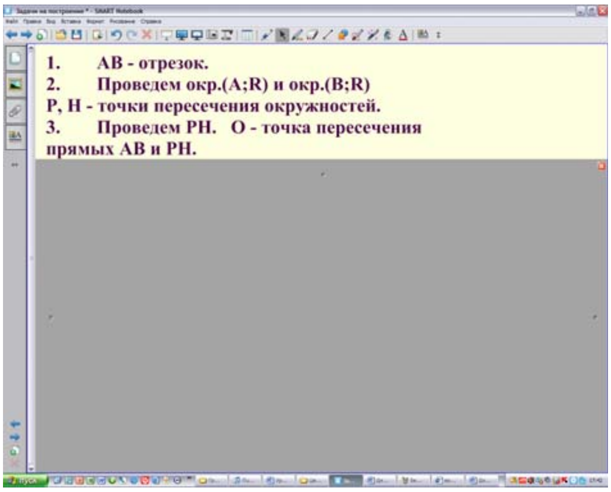
Оценка «_______»

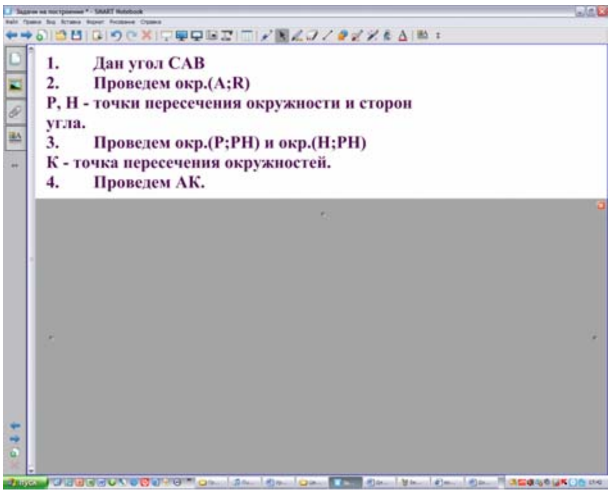
Приложение к уроку

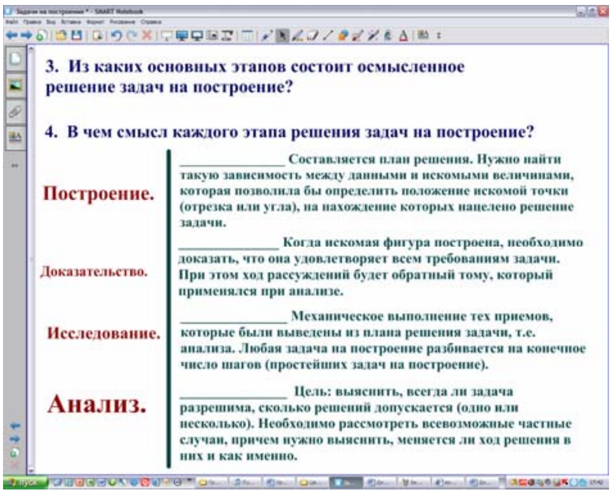


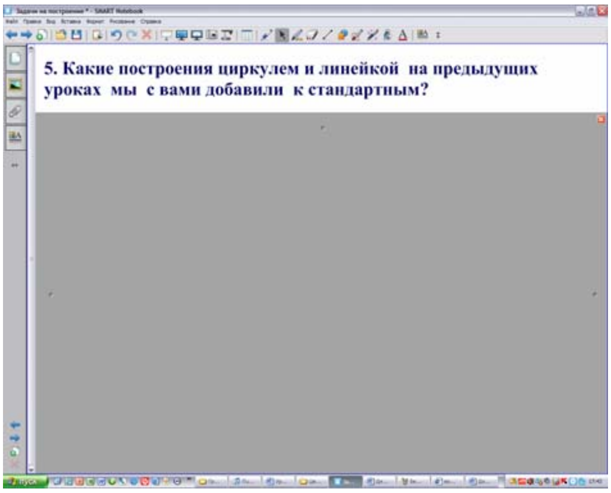


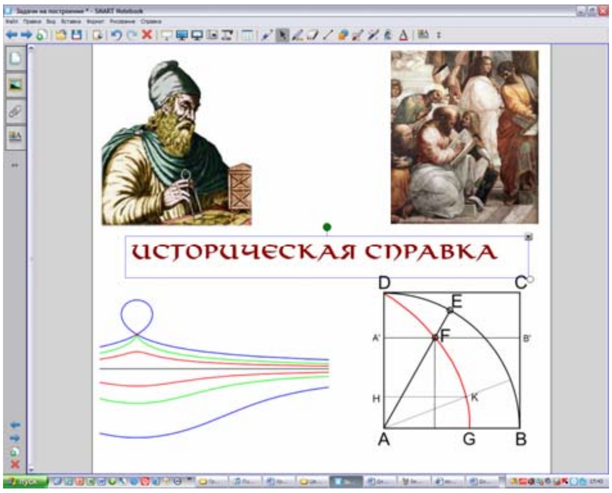


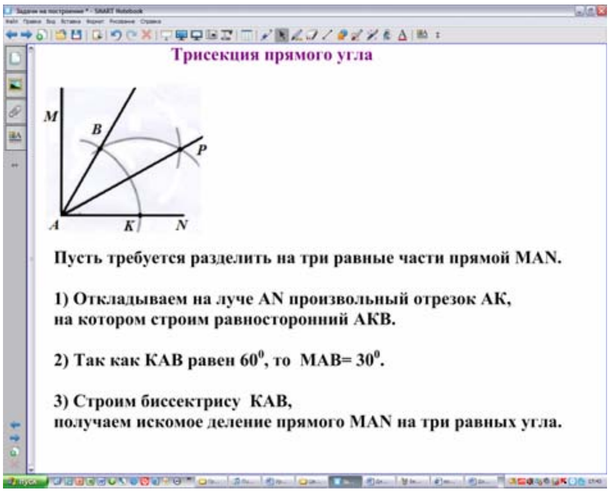


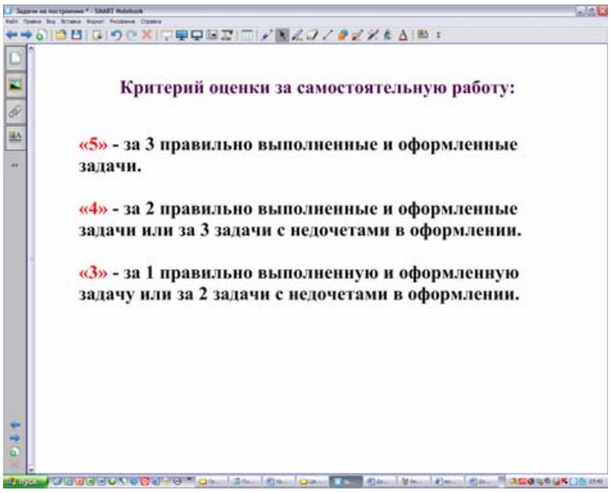


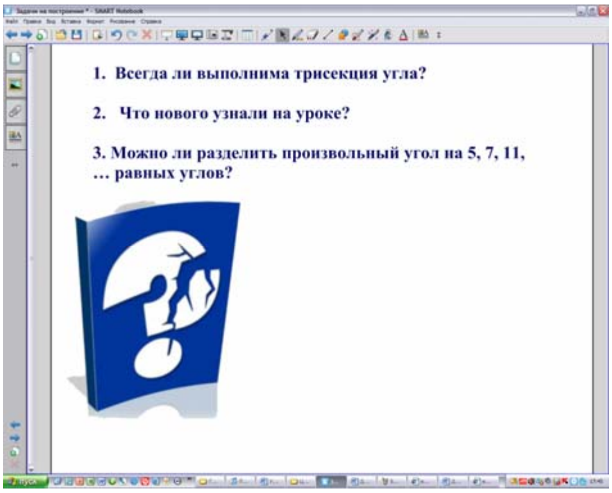


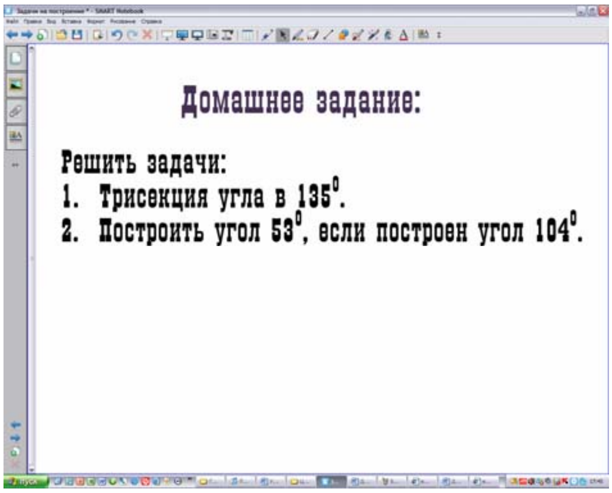

5. Какие построения циркулем и линейкой на предыдущих уроках мы с вами добавили к стандартным?


Историческая справка
D
C
E
F
A'
B'
H
K
A
G
B


Трисекция прямого угла
M
B
P
A
K
N
Пусть требуется разделить на три равные части прямой MAN.
1) Откладываем на луче AN произвольный отрезок AK, на котором строим равносторонний AKB.
2) Так как KAB равен 60^0, то MAB= 30^0.
3) Строим биссектрису KAB, получаем искомое деление прямого MAN на три равных угла.


Критерий оценки за самостоятельную работу:
«5» - за 3 правильно выполненные и оформленные задачи.
«4» - за 2 правильно выполненные и оформленные задачи или за 3 задачи с недочетами в оформлении.
«3» - за 1 правильно выполненную и оформленную задачу или за 2 задачи с недочетами в оформлении.


1. Всегда ли выполнима трисекция угла?
2. Что нового узнали на уроке?
3. Можно ли разделить произвольный угол на 5, 7, 11, … равных углов?


Домашнее задание:
Решить задачи:
1. Трисекция угла в 135^0.
2. Построить угол 53^0, если построен угол 104^0.